PÕHIKOOLI MATEMAATIKA LÕPUEKSAM 2014.a. 6. juuni

LAHENDUSED, KOMMENTAARID

1. Lihtsusta avaldis $\left(\frac{a-b}{a+b}-\frac{a+b}{a-b}\right)\cdot\left(a^2-b^2\right)$ ja arvuta kirjalikult selle väärtus, kui $a=10^2\cdot10^{-3}$ ja $b=(-5)^1$

Lahendus

$$\left(\frac{a-b^{(a-b}}{a+b}-\frac{a+b^{(a+b}}{a-b}\right)\cdot\left(a^2-b^2\right)=\frac{a^2-2ab+b^2-a^2-2ab-b^2}{(a+b)(a-b)}\cdot\left(a^2-b^2\right)=$$

$$=\frac{-4ab(a+b)(a-b)}{(a+b)(a-b)}=-\underline{\underline{4ab}}$$

Kui

$a=10^2\cdot10^{-3}=10^{-1}=0{,}1$ ja $b=(-5)^1=-5$, siis $-4ab=-4\cdot0{,}1\cdot(-5)=\underline{\underline{2}}$

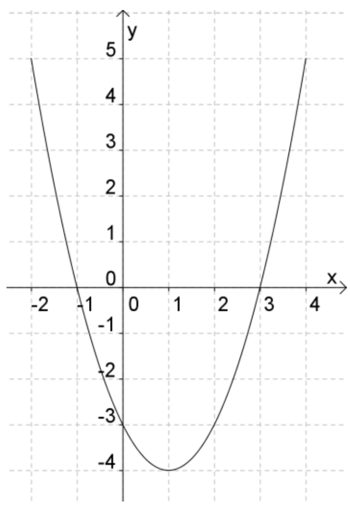
Vastus. Avaldis on lihtsustatult $-4ab$ ja etteantud a ja b väärtuse korral on avaldise väärtus 2.

2. On antud funktsioon $y=x^2-2x-3$.
   1) Arvuta selle funktsiooni nullkohad.
   2) Arvuta selle funktsiooni graafiku haripunkti koordinaadid.
   3) Leia selle funktsiooni graafiku ja y-telje lõikepunkti koordinaadid.
   4) Joonista selle funktsiooni graafik, kui x väärtused muutuvad -2st 4ni.

Lahendus

1) Nullkohad $x^2-2x-3=0$ $\quad x=1\pm\sqrt{1+3}=1\pm2$ $\quad x_1=-1$ $\quad x_2=3$
2) Haripunkt $x_H=\frac{-1+3}{2}=1$ $\quad y_H=f(1)=1^2-2\cdot1-3=-4$ $\quad H(1;-4)$
3) Selle funktsiooni graafiku ja y-telje lõikepunkti koordinaadid on (0;-3)
4) Joonistan graafiku arvutades veel graafiku punkte

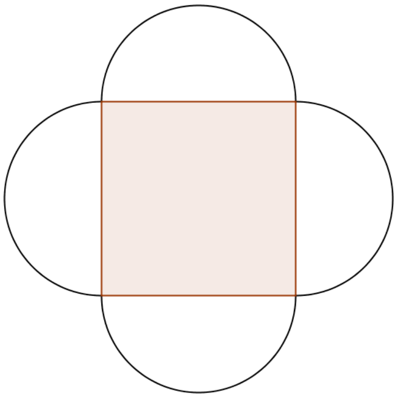
x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	5	0	-3	-4	-3	0	5



[Siin peaks ülesande tekstist lähtudes (määramispiirkond on -2-st kuni 4-ni) lõpetama parabooli joonistamise täpselt punktides (-2;5) ja (4;5), aga Innove enda pakutud vastuse lehel oli mõlemast punktist pisut edasi joonistatud (ja kindlasti oli nii paljudel õpilastel)]

Vastus. Nullkohad on $x_1=-1$ $\quad x_2=3$;
Haripunkt on $H(1;-4)$;
y-telge lõikab graafik punktis $H(0;-3)$

3. Parki rajati lillepeenar. Peenra keskosa on ruut, mille diagonaal on 4 m. Ruudukujulise osa igale küljele kujundati poolring (vt joonist)
    1) Arvuta peenra pindala.
    2) Peenra ruudukujulise osa diagonaalile istutatakse päevalilled. Mitu päevalille on vaja istutada, kui taimede vahe peab olema 25 cm ning esimene istutatakse ruudu tippu?



Lahendus

1) Ruudu pindala arvutan rombi pindala valemit kasutades $\boxed{S=\frac{d_1\cdot d_2}{2}}$

$$S_{ruut}=\frac{4\cdot 4}{2}=8(m^2)$$

[Muidugi võis ka Pythagorase teoreemi järgi leida kõigepealt ruudu külje ja siis ruudu pindala. Aga seejuures peaks vältima ruudu külje pikkuse ümardamist. Seega $a^2+a^2=4^2$

$2a^2=16$ $\quad a^2=8$ $\quad a=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ (tegelikult pole siinkohal osalisel juurimisel erilist mõtet, sest järgmisel sammul me niigi ruutjuure kaotame)

$S_{ruut}=\left(2\sqrt{2}\right)^2=4\cdot 2=8\ (m^2)$]

Poolringe on neli, seega kokku kahe ringi pindala $\boxed{S_{ring}=\pi r^2}$ Poolringide raadiused on pool ruudu küljest a. Nüüd küll tuleb ikkagi Pythagorase teoreemi põhjal leida ruudu külje pikkus (kui seda enne ei teinud) $a^2+a^2=4^2$ $\quad a^2=8$ $\quad a=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ $\quad r=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

4 poolringi pindala kokku on $S=2\cdot\pi\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2=4\pi\,(m^2)\approx 12{,}57$ ja kogu peenra pindala on $S=8+4\pi=4(2+\pi)(m^2)\approx 20{,}57(m^2)$ sajandiku ruutmeetri (seega dm^2) täpsusega $\underline{\underline{20{,}57\ m^2}}$.

[Siin polnud ülesande tekstis kahjuks öeldud, kui suure täpsusega vastust soovitakse. Ei oska öelda, kas see oli meelega nii, et näha õpilaste oskust ülesandele loominguliselt läheneda või kogemata. Innove vastuste lehel on pakutud nii: $S=4(2+\pi)\approx 20{,}6(m^2)$ lisades, et õigeks lugeda ka vastus 21 m^2. Meie ei lugenud õigeks vastust ainult irratsionaalsel kujul $S=4(2+\pi)(m^2)$ pidades silmas printsiipi, et nn elulistes mõõtmistega seotud ülesannetes ei anta vastust irratsionaalarvudes vaid „mõistlikult!“ ümardades. Mõistlik on siinjuures mõelda, millise täpsusega see 4 m pikkune külg pargis mõõdetakse. Ilmselt 1 cm täpsusega 4,00 m ja pindalas oleks mõistlik anda siis tõesti kolm tüvenumbrit st 20,6 m^2.]

2) Kui diagonaalile pikkusega 4 m= 400 cm iga 25 cm järel istutada päevalill, siis mahub neid sinna 400:25 + 1=17 tk.
[väga levinud viga on siin vastus 16. Jagades leitakse õigesti, et 25 cm pikkusi lõike mahub diagonaalile 16, aga unustatakse, et lõikude otspunkte on ühe võrra rohkem]

Vastus. Kogu lillepeenra pindala on $S = 4(2+\pi)\ m^2$ ja 1 dm^2 täpsusega $20{,}57\ m^2$. Päevalilli mahub ühele diagonaalile 25 cm vahedega 17 taime.

4. Kaks kilogrammi viinamarju ja üks kilogramm pirne maksab kokku 5 eurot. Kui viinamarjade kogus vähendada 4 korda ja pirnide kogust suurendada 200 grammi võrra, siis tuleks ostu eest maksta 2 eurot 58 senti. Arvuta viinamarjade ja pirnide kilohind. (Loodan, et kõik said aru – arvutada tuleb kummagi hind €/kg)

Lahendus

Olgu viinamarjade hind x €/kg ja pirnide hind y €/kg. Siis esimene ost maksab 2x + y, mis teksti järgi võrdub 5-ga. Teisel ostul on pirne 1kg + 200 g = 1,2 kg.
Teine ost maksab 0,5x + 1,2 y, mis teksti järgi võrdub 2,58-ga.
(Saame lineaarvõrrandite süsteemi)

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 0{,}5x + 1{,}2y = 2{,}58 \end{cases} \qquad y = 5 - 2x \qquad 0{,}5x + 1{,}2(5-2x) = 2{,}58$$

$$0{,}5x + 6 - 2{,}4x = 2{,}58 \qquad -1{,}9x = -3{,}42 \qquad x = 1{,}8 \qquad y = 5 - 2\cdot 1{,}8 = 1{,}4$$

Kontroll. Kui viinamarjade hind on 1,80 €/kg ja pirnide hind on 1,4 €/kg, siis esimene ost maksab $2\cdot 1{,}8 + 1{,}4 = 5$ eurot ja teine ost $\frac{2\cdot 1{,}8}{4} + 1{,}2\cdot 1{,}4 = 2{,}58$ eurot. See vastab ülesande tingimustele.

Vastus. Viinamarjade hind on 1,80 €/kg ja pirnide hind on 1,4 €/kg.

5. Kinos käidi 2012. aastal kokku ligi 2,5 miljonit korda, mis oli viimase kahekümne aasta suurim arv.
2011. aastaga võrreldes käidi kinos üle 100 000 korra enam.
Vaadatuimad filmid kinos olid "Jääaeg 4" (171 000 vaatajat), „Skyfall" (95 000 vaatajat) ja „Madagaskar 3" (88 000 vaatajat). Pingerea 4. kohal oli vaadatuim Eesti film – Toomas Hussari „Seenelkäik" (73 700 vaatajat). Ilmar Raagi „Eestlanna Pariisis" oli vaadatavuse pingereas 15. kohal (36 000 vaatajat) ning Andres Kõpperi ja Arun Tamme „Vasaku jala reede" 21. kohal (33 000 vaatajat). Eesti filme vaatas kinodes ligi 250 000 vaatajat ehk 10% kõikidest kinokülastajatest. Kinopileti keskmine hind oli 4,1 eurot ja see jäi varasema aastaga võrreldes samale tasemele.

(Allikas: http://www.stat.ee/65163)

Eesti kinodes 2009 – 2012 linastunud täispikad filmid

	Filmid kokku	Eesti filmid	Ameerika Ühendriikide filmid
2009	313	24	200
2010	294	14	177
2011	301	40	143

2012	332	28	154

(Allikas: http://pub.stat.ee/px-web.2001/Dialog/varval.asp?ma=KU07&lang=2)

Vasta küsimustele.

1) Mis oli 2012. aastal vaadatuim Eesti film?
2) Kui suur oli 2012. aastal kinopiletite müügist saadud rahasumma?
3) Mitu täispikka filmi linastus ajavahemikul 2009 – 2012 Eesti kinodes keskmiselt igal aastal?
4) Mitu protsenti moodustasid 2012. aastal kõikidest Eestimaa kinodes linastunud filmidest Eesti täispikad filmid?

5) Mitme protsendi võrra ja millises suunas muutus 2012. aastal linastunud Ameerika Ühendriikides toodetud täispikkade filmide arv 2009. aastaga võrreldes?

Lahendus

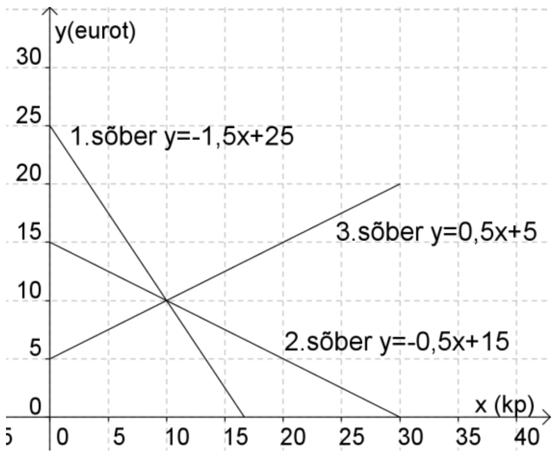
1) 2012. aastal vaadatuim Eesti film oli „Seenelkäik".
2) 2012. aastal oli kinopiletite müügist saadud rahasumma $2{,}5 \cdot 4{,}1 = 10{,}25$ miljonit eurot (see on 10 250 000 €).
3) (313 + 294 + 301 + 332) : 4 = 1240 : 4 = 310 täispikka filmi linastus keskmiselt igal aastal 2009 – 2012.
4) $28 : 332 \approx 8{,}4\%$ filmidest olid Eesti filmid.

   [Kuna jällegi pole kahjuks öeldud, millise täpsusega vastust soovitakse, jääb see õpilase otsustada ja ka vastuse 8% luges meie kooli komisjon õigeks. Täpne vastus $8\frac{36}{83}\%$ tekitaks probleeme. Arvutuslikult oleks see õige, aga tunduks sel kohal väga ebatraditsiooniline.]
5) $\frac{200-154}{200} = 23\%$ võrra vähenes USA filmide näitamine Eesti kinodes 2012. aastal võrreldes 2009. aastaga.

Vastus

1) 2012. aastal vaadatuim Eesti film oli „Seenelkäik".
2) 2012. aastal oli kinopiletite müügist saadud rahasumma 10 250 000 €.
3) 310 täispikka filmi linastus keskmiselt igal aastal 2009 – 2012.
4) $\approx 8{,}4\%$ linastunud filmidest olid 2012. aastal Eesti filmid.
5) USA filmide näitamine Eesti kinodes vähenes 2012. aastal võrreldes 2009. aastaga 23% võrra.

6. Märtsikuu viimase päeval said kolm sõpra aprillikuuks taskuraha. Esimene sõber sai 25 eurot ja kulutas iga päev 1,5 eurot. Iga päeva lõpuks oli tal alles rahasumma, mille saab leida funktsiooni $y = -1{,}5x + 25$ graafiku abil, kus y on rahasumma eurodes ja x on kuupäev (vt joonist).
Teine sõber sai 15 eurot ja kulutas iga päev ja kulutas iga päev võrdse summa. Temal jätkus raha täpselt kuu lõpuni.
Kolmas sõber sai 5 eurot. Tema otsustas seda mitte kulutada ja pani saadud raha kohe hoiukarpi. Aruka otsuse eest lisasid vanemad igal hommikul hoiukarpi 50 senti.



1) Näita arvutuste abil, mis kuupäeval sai esimesel sõbral raha otsa ja kui palju sai ta sellel päeval kulutada.
2) Joonesta antud koordinaattasandile sirge, mille abil saab leida rahasummat, mis oli
    a) Teisel sõbral iga päeva lõpuks alles;
    b) Kolmanda sõbra hoiukarbis iga päeva lõpuks.

   Koosta mõlemale sirgele vastav lineaarfunktsioon kujul $y = ax + b$, kus a ja b on arvud.

3) Veekeskuse päevapilet maksab 10 eurot. Kas sõpradel oli võimalik mõnel aprillikuu päeval koos veekeskusesse minna? Põhjenda oma vastust.

Lahendus

1) Kui esimene sõber kulutas iga päev 1,5 eurot, siis jätkus raha $25 : 1{,}5 = 16\frac{2}{3}$ päevaks. See tähendab, et 16 päevaga sai ta kulutada $16 \cdot 1{,}5 = 24$ € ja 17.aprillil sai kulutada oma viimased 25 – 24 = 1 eurot.
2) a) Kuna teisel sõbral on alul 15 eurot, siis on lineaarfunktsiooni vabaliige (ja vastava sirge algordinaat) 15 ja kuna ta raha summa iga päevaga väheneb 0,5 eurot, siis on lineaarfunktsiooni lineaarliikme kordaja (ja vastava sirge tõus -0,5). Seega teise sõbra raha muutumist iseloomustab funktsioon y=-0,5x + 15
   b) Kuna kolmandal sõbral on alul 5 eurot, siis on lineaarfunktsiooni vabaliige (ja vastava sirge algordinaat) 5 ja kuna ta raha summa iga päevaga suureneb 0,5 eurot, siis on lineaarfunktsiooni lineaarliikme kordaja (ja vastava sirge tõus 0,5). Seega kolmanda sõbra raha muutumist iseloomustab funktsioon y=0,5x + 5
   3) Vastuseks on **Jah**, kui sõbrad muudavad oma esialgseid kavatsusi terve kuu kohta ja otsustavad 10.aprillil kogu olemasoleva raha ära kulutada. Graafikutelt nähtub, et 10.aprillil

on kõigil kolmel olemas parajasti 10 eurot. Vastuseks on **EI,** kui jäädakse kuu alul planeeritud raha kulutamise/kogumise plaani juurde.

Vastus. Esimesel sõbral sai raha otsa 17.aprillil ja sel päeval oli tal võimalik kulutada 1 euro.

Teise sõbra rahaseisu iseloomustab lineaarfunktsioon y=-0,5x + 15

Kolmanda sõbra rahaseisu iseloomustab lineaarfunktsioon y=0,5x + 5

Veekeskuse koos külastamine on mõeldav 10.aprillil, aga siis peavad sõbrad muutma oma esialgset raha kulutamise või kogumise plaani.

[Selle ülesande andmine eksamiülesandeks on tegelikult kahetsusväärne. Küllap mõneski 10.klassis järgmisel aastal klaaritakse ära siin matemaatilist korrektsust eirates antud väide, et planeeritud raha kulutamist saame näidata lineaarfunktsiooni graafikuna. Häda on selles, et ei raha kulutamine ega saamine pole pidev protsess nagu näiteks küünla pikkus põlemisel või anuma täitumine avatud kraani all. Rahasumma muutumine on diskreetne protsess. Kuigi selline eristamine ei kuulu otseselt põhikooli ainekavasse, pole eksamil siiski korrektne esitada ülesandeid ja oodata vastuseid, mis hiljem kõlbmatuks tuleb tunnistada.

Üksikud õpilased tekitasid enda jaoks tähenärijalikult probleemi lausest „Aruka otsuse eest lisasid vanemad igal hommikul hoiukarpi 50 senti“. Kas nii isa kui ema lisasid 50 senti, või leppisid nad kokku, kumb selle annetuse teeb? Pea-asi, et kahe vahelt ära ei unusta …]

7. Ema valis kingituste pakkimiseks kaks risttahukakujulist karpi. Suure karbi põhiservad on 50 cm ja 30 cm ning karbi ruumala 18 000 cm^3. Suure ja väikese karbi põhjad on sarnased hulknurgad, mille ümbermõõdud suhtuvad nagu 5 : 2. Suur karp on 3 cm võrra kõrgem kui väike karp.
   1) Arvuta suure karbi külgpindala.
   2) Arvuta väikese karbi ruumala.
   3) Suure karbi kõik tahud kleebitakse väljastpoolt paberiga üle. Paberirulli laius on 1 m. Mis on vähim võimalik paberikulu, kui karbi iga tahu jaoks lõigatakse üks sobiva suurusega tükk? Selgita joonise või arvutuste abil oma vastust.

Lahendus

1) Kuna risttahuka ruumala leitakse valemiga $\boxed{V = S_p \cdot h}$ ja põhjaks oleva ristküliku pindala $\boxed{S_p = ab}$ siis suure karbi kõrguse saame antud ruumala ja põhja pindala jagatisena $h = \dfrac{18000}{50 \cdot 30} = 12\ (cm)$. Risttahuka külgpindala on $\boxed{S_k = P \cdot h = 2(a+b) \cdot h}$

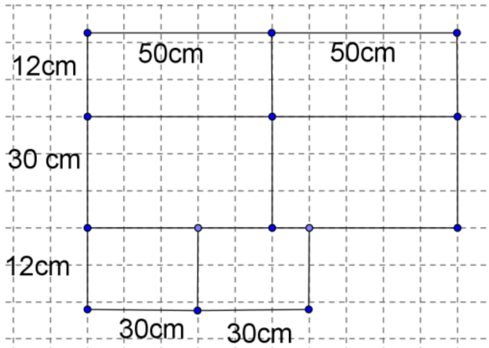
$$S_k = 2 \cdot (50+30) \cdot 12 = \underline{\underline{1920\ (cm^2)}}$$

2) Väikese karbi kõrgus on 12 – 3 = 9 cm. Karpide põhjade joonelementide suhe on 5 : 2, seega on väikese karbi põhiservad $\frac{50 \cdot 2}{5} = 20\ (cm)$ ja $\frac{30 \cdot 2}{5} = 12\ (cm)$

[Loomulikult võis sarnaste kujundite sarnasusteguri kasutamist põhjendada ka pikemalt]

Väikese karbi ruumala on $V = 12 \cdot 20 \cdot 9 = \underline{\underline{2160\ (cm^3)}}$

3) Vähim paberikulu suure karbi kõigi 6 tahu katmiseks on cm^2-tes risttahuka täispindala $S_t = 2 \cdot (50 \cdot 30 + 30 \cdot 12 + 50 \cdot 12) = \underline{\underline{4920\ (cm^2)}}$. Uurime veel mitu jooksvat sentimeetrit paberirullist tuleks minimaalselt lõigata. Paigutame kõikide tahkude katmise tükid nii, et paberirullist ära lõigatud ristkülik oleks parimal viisil kasutatud (vt joonist)



Lõikame paberirullist 12+12+30=54 cm pikkuse tüki ja sellest jääb kasutamata $(100 - 2 \cdot 30) \cdot 12 = 480\ (cm^2)$

<u>Vastus.</u>

1) Suure karbi külgpindala on 1920 cm^2.
2) Väikse karbi ruumala on 2160 cm^3.
3) Suure karbi kõikide tahkude katmiseks kulub 4920 cm^2 paberir, milleks peaks paberirullist lõikama ära 54 cm pikkuse tüki.

[Peab märkima, et ega esitatud küsimusest pole otseselt võimalik näha oodatavat vastust 54 cm. Meie komisjon andis maksimumpunktid ka siis kui vastati 4920 cm^2 ning joonisega näidati lõigete optimaalne paigutus.]